

6/3/2017.

(πλ)

$3x+5$ όχι γονιμό

όπως $3x+5 = 3(\underbrace{x+5/3}_{\text{γονιμό}})$

Θεώρημα: Έστω F σώμα και $0 \neq f(x) \in F[x]$. Τότε υπάρχουν γονιμικά $c \in F \setminus \{0\}$ και γονιμικά ^{γονιμικά} $g_1(x), \dots, g_r(x)$ ώστε $f(x) = c \cdot g_1(x) \cdot \dots \cdot g_r(x)$
Μάλιστα $c = \text{αυτελεστής μεγιστοβαθμίου όρου του } f(x)$

Υποθέτουμε: Έστω F σώμα, $f(x) \in F[x]$.

Αν $\deg f(x) = 1 \Rightarrow f(x)$ ανάγωγο στο $F[x]$

Αν $\deg f(x) = 2$ ή 3 τότε $(f(x) \text{ ανάγωγο στο } F[x]) \Leftrightarrow \nexists \text{ } f(x) \text{ δεν έχει ρίζα στο } F$

Παράδειγμα: Έστω $F = \mathbb{Q}$ και $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$

Είναι το $f(x)$ ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$;

Ναι, γιατί $\deg f(x) = 2$ και οι ρίζες του στο $\mathbb{R}$ είναι $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Είναι το $f(x)$ ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$;

Όχι, γιατί έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον στο $\mathbb{R}[x]$

Παράδειγμα: Είναι το $x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$ ανάγωγο;

Όχι, γιατί έχει ρίζες στο $i \in \mathbb{C}$

Άρα $x-i$ διαιρεί το x^2+1 στο $\mathbb{C}[x]$

x^2+0x+1	$x-i$
$-x^2+ix$	$x+i$
$ix+1$	
$-ix-1$	
0	

Άρα $x^2+1 = (x+i)(x-i)$

Έστω $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ή $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Βρείτε τις ρίζες.

Βασικός: $f(x) = 1$ $f(x) = ax + b$ με $a \neq 0$. Μια ρίζα $-\frac{b}{a} \rightarrow a=2$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ με $a \neq 0$ (υποθ. $a, b, c \in \mathbb{R}$).

Θέτουμε $\Delta = b^2 - 4ac$. Αν $\Delta > 0$ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.
$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Αν $\Delta = 0$ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$ πολλα. Δύο $-\frac{b}{2a}$

$\Delta < 0$ δύο ρίζες στο $\mathbb{C}$ $\frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

→ Βασικός 3 και 4.

Έχουν αποδειχτεί αυστηρά ότι γενικά ΔΕΝ υπάρχουν τύποι με ριζικά για τις ρίζες.

Άλλες ρίζες πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{Z}$

Πρόταση: Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ με $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$

Υποθέτουμε $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$, $a_d \neq 0$

Έστω $p, q \in \mathbb{Z}$ με $q > 0$ και $\text{M.K.S.}(p, q) = 1$

Αν ο αριθμός $\frac{p}{q}$ είναι ρίζα του $f(x)$, τότε $p|a_0$ και $q|a_d$

Απόδειξη: $f(\frac{p}{q}) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 \frac{p}{q} + \dots + a_d (\frac{p}{q})^d = 0$

$$\rightarrow a_0 q^d + a_1 q^{d-1} p + \dots + a_d p^d = 0 \quad (*)$$

$$\text{H } (*) \rightarrow p | a_0 q^d \Rightarrow p | a_0$$

$\text{M.K.S.}(q, p) = 1$

$$(*) \rightarrow q | a_d p^d \Rightarrow q | a_d$$

$\text{M.K.S.}(p, q) = 1$

Παράδειγμα: Έστω $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 2 \in \mathbb{R}[x]$

Έστω $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ρίζα με $q \geq 1$ και $\text{H.K.A.}(p, q) = 1$

Τότε από προηγούμενο πρότασι $p|2$ και $q|3$

Άρα возможные ρίζες στο $\mathbb{Q}$ $\{2/1, -2/1, 2/3, -2/3, 1/1, -1/1, 1/3, -1/3\}$

Δοκιμάζοντας το 2 ρίζα του $f(x)$.

Μετά τις πράξεις $3x^3 - 6x^2 + x - 2 = (x-2)(3x^2+1)$

Επαγόμενος το 2 μοναδική ρίζα του $f(x)$ στο $\mathbb{R}$.

Υπενθύμιση: Αν $f: V \rightarrow V$ γραμμική, συμβολίζουμε
 $f^0 = \text{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f^2$

Αν $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$

Συμβολισ. $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{d-1} x^{d-1} + a_d x^d \in \mathbb{F}[x]$

Αν $T: V \rightarrow V$ γραμ. : $f(T) = a_0 \text{id}_V + a_1 T + \dots + a_{d-1} T^{d-1} + a_d T^d : V \rightarrow V$

Αν $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$: $f(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{d-1} A^{d-1} + a_d A^d \in \mathbb{F}^{n \times n}$

Παράδειγμα: Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = 2 + 1x^3 + 2x^4$

τότε $f(A) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot A^3 + 2 \cdot A^4 = \begin{bmatrix} 2+1+2 & 0 \\ 0 & 2+3^3+2 \cdot 3^4 \end{bmatrix}$

Παρατήρηση: Μπορούμε να ορίσουμε πινάκες με στοιχεία στο $\mathbb{F}[x]$

Επίσης αν $B^{n \times n}$ πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{F}[x]$

ορίζεται η ορίζεται $\det B$ όπως, στην $\mathbb{Q}$ και είναι
στοιχείο του $\mathbb{F}[x]$

Παράδειγμα: Αν $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & x \end{bmatrix}$, $A+B = \begin{bmatrix} x+1 & 5 \\ 2+x & 2+x \end{bmatrix}$

$$\det B = 1 \cdot x - 2 \cdot 5 = x - 10.$$

Ορισμός: Έστω $A \in F^{n \times n}$. Ορίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) \in F[x]$ ως εξής

$$\boxed{\chi_A(x) = \det(A - xI_n)}$$

Παρατήρηση: Έχουμε $\deg \chi_A(x) = n$ και ο μεγιστοβαθμικός συντελεστής του $\chi_A(x) = (-1)^n$

Παράδειγμα: Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ τότε $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 4 & 5-x \end{vmatrix} = (2-x)(5-x) - 3 \cdot 4 = x^2 - 7x - 2$

Αν $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ τότε $\chi_B(x) = \det(B - xI_3) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 3 \\ 0 & 1-x & 4 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} =$

$$= -(x-2)(x-1)(x-5).$$

Ορισμός: Έστω $A \in F^{n \times n}$ και $\lambda \in F$. Το λ λέγεται ιδιοτιμή του A αν λ ρίζα του $\chi_A(x)$.

Πρόταση: Έστω $A \in F^{n \times n}$ και $\lambda \in F$. Τ.Α. $A - \lambda I$

i) λ ιδιοτιμή του A

ii) $\det(A - \lambda I) = 0$

iii) Ο πίνακας $A - \lambda I \in F^{n \times n}$ δεν αντιστρέφεται

iv) $\dim V_A(\lambda) \geq 1$ όπου

$$V_A(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^{n \times 1} \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times 1} \mid (A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{n \times 1} \right\}$$

Τότε το $V_A(\lambda)$ που είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n \times 1}$
Ονομάζεται ΙΝΟΧΩΡΟΣ του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, τότε $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)$

Δύο ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$

Υποχώρος $V_A(\lambda_1)$ και $V_A(\lambda_2)$

$$V_A(\lambda_1) = V_A(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \mid (A - I_2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_A(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mid A - 2I_2 = \mathbf{0}_{2 \times 2} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} : \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Θεώρημα: Αλγεβρική πολλα. ιδιοτιμής $\lambda =$ πολλα λ , συν. ρίζα του $\chi_A(x)$

Γεωμετρική πολλα ιδιοτιμής λ_j
 $\dim_{\mathbb{F}} V_A(\lambda)$

Ιδιοτιμή	Αλγ. πολ.	Γεω. πολ.
$\lambda_1 = 1$	1	1
$\lambda_2 = 2$	1	1